4.2 Отделимость выпуклых множеств

При выводе необходимых условий экстремума (принципа Лагранжа) в выпуклых задачах и в задачах с равенствами и неравенствами мы будем использовать свойство отделимости непересекающихся выпуклых множеств.

Определение 1. *Множества A и B из пространства X называются отделимыми, если существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$, для которого*

$$\inf_{a\in A} \langle \lambda, a\rangle \geq \sup_{b\in B} \langle \lambda, b\rangle.$$

Из определения следует, что множества являются отделимыми, если можно провести гиперплоскость $H = \{x \in X \mid \langle \lambda, x\rangle = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, так что одно из множеств лежит в одном замкнутом полупространстве $H_+ = \{x \in X \mid \langle \lambda, x\rangle \geq c\}$, а другое — в другом замкнутом полупространстве $H_- = \{x \in X \mid \langle \lambda, x\rangle \leq c\}$.

Замечание. Поскольку функционал λ в определении отделимости является непрерывным, то для отделимости (не строгой!) вместо множеств A и B можно рассматривать их внутренности или замыкания.

Определение 2. *Множества A и B называются строго отделимыми, если существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, для которого*

$$\inf_{a\in A} \langle \lambda, a\rangle > \sup_{b\in B} \langle \lambda, b\rangle.$$

4.2.1 Теоремы отделимости

Приведем результаты об отделимости в конечномерном случае и в случае линейных нормированных пространств.

Теорема 1 (отделимости множеств в конечномерном пространстве)**.** *Пусть A и B — непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$,* $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$ (*в частности,* $A \cap B = \emptyset$)*. Тогда множества A и B отделимы.*

Доказательство. Поскольку отделимость множеств $\operatorname{int} A$ и B равносильна отделимости множеств A и B, то, не ограничивая общности, считаем, что $A \cap B = \emptyset$. Обозначим $C := A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$ (разность по Минковскому множеств A и B). Поскольку $A \cap B = \emptyset$, то $0 \notin C$. Надо доказать, что существует вектор $\lambda \neq 0$, для которого

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle \iff \inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle = \langle \lambda, 0 \rangle \geq 0,$$

т. е., гиперплоскость $\langle \lambda, c \rangle = 0$ отделяет C от начала координат — точки O.

1) Предположим, что $0 \notin \overline{C}$. Рассмотрим задачу

$$f(x) = |x| \to \inf; \quad x \in \overline{C}. \tag{P}$$

Так как f — непрерывная функция и $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$, то по следствию из т. Вейерштрасса абсолютный минимум в задаче (P) достигается. Поэтому существует вектор $\lambda \in \operatorname{absmin} P$, $\lambda \in \overline{C}$. Причем, $\lambda \neq 0$ в силу условия $0 \notin \overline{C}$. Покажем, что функционал λ искомый. Если $\inf\limits_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle < 0$, то существует точка $c \in C$, для которой $\langle \lambda, c \rangle < 0$, т. е., векторы λ и c образуют тупой угол. Значит, основание H высоты OH треугольника $Oc\lambda$ лежит на отрезке $[c;\ \lambda]$ (и, в силу выпуклости множества $\overline{C}$, принадлежит $\overline{C}$), и $|OH| < |O\lambda|$, что противоречит выбору точки λ.

2) Предположим, что $0 \in \overline{C}$. Так как $0 \notin C$, то $0 \in \partial C$. Поэтому существует последовательность $y_k \to 0$, $y_k \notin \overline{C}$. В пункте 1) доказано, что для таких точек существуют векторы $\lambda_k \neq 0$, что выполняется неравенство: $\inf\limits_{c \in C} \langle \lambda_k, c \rangle \geq \langle \lambda_k, y_k \rangle$. Не ограничивая общности, считаем, что $|\lambda_k| = 1 \ \forall \ k$. Сфера в $\mathbb{R}^n$ компактна. Значит, можно перейти к подпоследовательности λ_k, сходящейся к некоторой точке λ, $|\lambda| = 1$. При этом $|\langle \lambda_k, y_k \rangle| \leq |\lambda_k| \cdot |y_k| = |y_k| \to 0$. Следовательно,

$$\inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle = \inf_{c \in C} \lim_{k \to \infty} \langle \lambda_k, c \rangle \geq \lim_{k \to \infty} \langle \lambda_k, y_k \rangle \to 0 \Rightarrow \inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle \geq 0.$$

То есть, λ – искомый функционал. $\square$

Теорема 2 (отделимости множеств в нормированном пространстве)**.** *[АТФ, с. 124] Пусть A и B — непустые выпуклые множества в X, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$. Тогда множества A и B отделимы.*

В теореме отделимости в конечномерном пространстве $\operatorname{int} A$ может быть пуста. Напомним, что из определения выпуклого множества следует, что пустое множество является выпуклым. И вместо условия $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$ можно писать $A \cap B = \emptyset$. В теореме отделимости в бесконечномерном пространстве это не так. Надо требовать, чтобы $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Пример двух непересекающихся выпуклых подмножеств, которые нельзя отделить.

Рассмотрим в бесконечномерном гильбертовом пространстве $l_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \right\}$ два множества с пустыми внутренностями: множество $A = \left\{ a \in l_2 \mid \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = 1 \right\}$ и точку $b = 0$. Множество A имеет пустую внутренность, поскольку никакой шар не содержится в A. Покажем, что эти множества нельзя отделить. Т. е надо показать, что не существует ненулевого линейного непрерывного функционала $\lambda \in l_2^*$ (напомним, что l_2^* изоморфно l_2) такого, что

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle = 0. \qquad (*)$$

Возьмем произвольный функционал $\lambda \in l_2^*$, $\lambda \neq 0$. Покажем, что $\inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle = -\infty$, тогда неравенство $(*)$ не будет выполняться. Поскольку $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \neq 0$, то $\exists\ \lambda_i \neq \lambda_j$ (для определенности, $\lambda_i < \lambda_j$). Возьмем точку $a = (a_1, a_2, \ldots)$, у которой следующие компоненты: $a_i = n$, $a_j = 1 - n$, $a_k = 0$ при $k \neq i, j$. Тогда точка $a \in A$ и

$$\langle \lambda, a \rangle = \lambda_i a_i + \lambda_j a_j = \lambda_i n + \lambda_j (1 - n) = n(\lambda_i - \lambda_j) + \lambda_j \to -\infty$$

при $n \to +\infty$. Значит, множество A и точку b нельзя отделить.

4.2.2 Теоремы о строгой отделимости

Теорема 1 (о строгой отделимости точки от множества в нормированном пространстве)**.** *Пусть A — непустое выпуклое замкнутое множество в X, $b \notin A$. Тогда точку b можно строго отделить от множества A.*

Доказательство. Поскольку точка $b \notin A$ — замкнутому множеству, то существует $\varepsilon > 0$, для которого $A \cap (b + \varepsilon U) = \emptyset$, где $U := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар пространства X. Следовательно, по теореме отделимости в нормированном пространстве выпуклые множества A и $B := b + \varepsilon U$ ($\operatorname{int} B \neq \emptyset$, $\operatorname{int} B \cap A = \emptyset$) можно отделить, т. е., существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$ такой, что

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{x \in b + \varepsilon U} \langle \lambda, x \rangle = \sup_{u \in U} \langle \lambda, b + \varepsilon u \rangle =$$

$$= \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \sup_{u \in U} \langle \lambda, u \rangle = \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \|\lambda\|_{X^*}.$$

Отсюда $\inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle > \langle \lambda, b \rangle$. Это и означает, что точка b строго отделена от множества A. □

Рассмотрим следующее обобщение доказанной теоремы.

Теорема 2 (о строгой отделимости компакта)**.** *A и B — непустые выпуклые замкнутые подмножества нормированного пространства X, причем B — компакт и $A \cap B = \emptyset$. Тогда множества A и B строго отделимы.*

Доказательство. Обозначим $U := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар пространства X. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$, для которого $A \cap (B + \varepsilon U) = \emptyset$. В противном случае существуют последовательности $\{a_k\} \in A$, $\{b_k\} \in B$ такие, что $\|a_k - b_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку B — компакт, то из последовательности b_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты записи считаем, что это подпоследовательность и есть сама последовательность b_k. Так как последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ сходятся к одной точке, а последовательность

$b_k \to b \in B$, то и последовательность $a_k \to b$ и $b \in A$ в силу замкнутости A. Таким образом, точка $b \in A \cap B$ — противоречие. Следовательно, $A \cap (B + \varepsilon U) = \emptyset$. Тогда по теореме отделимости ($A \cap \operatorname{int} B' = \emptyset$, $\operatorname{int} B' \neq \emptyset$) множества A и $B' = B + \varepsilon U$ можно отделить, т. е., существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$ такой, что

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{x \in B + \varepsilon U} \langle \lambda, x \rangle = \sup_{b \in B, u \in U} \langle \lambda, b + \varepsilon u \rangle =$$

$$= \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \sup_{u \in U} \langle \lambda, u \rangle = \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \|\lambda\|_{X^*}.$$

Отсюда $\inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle > \sup\limits_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle$. Это и означает, что A и B строго отделимы. $\square$

Приведем еще одно доказательство теоремы о строгой отделимости компакта, использующее лемму о замкнутости суммы (разности) замкнутого множества и компакта, которая также имеет самостоятельный интерес.

Лемма (о замкнутости суммы (разности) замкнутого множества и компакта)**.** *Пусть X — нормированное пространство, множества $A, B \subset X$, A — замкнуто, B — компакт. Тогда алгебраическая сумма $C = A + B$ (разность $A - B$) замкнута.*

Доказательство. Пусть имеется сходящаяся последовательность точек $c_k \in C$, $c_k \to c_0$. Докажем, что $c_0 \in C$. По условию леммы $c_k = a_k + b_k$, где $a_k \in A$, $b_k \in B$. Так как B — компакт, то из последовательности b_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность b_{k_m}. Тогда подпоследовательность b_{k_m} сходится к некоторой точке $b_0 \in B$. Значит, подпоследовательность $a_{k_m} = c_{k_m} - b_{k_m}$ будет сходиться к точке $c_0 - b_0 =: a_0$ и точка $a_0 \in A$ в силу замкнутости A. Значит, $c_0 = a_0 + b_0$, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, т. е. $c_0 \in C$. $\square$

Второе доказательство теоремы о строгой отделимости компакта

Доказательство. Обозначим $C := A - B$. Тогда множество C замкнуто по лемме о замкнутости суммы (разности) замкнутого множества и компакта и $0 \notin C$. Следовательно, по теореме о строгой отделимости точки от выпуклого замкнутого множества точку 0 можно строго отделить от множества C, т. е., существует линейный непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$ такой, что

$$\inf_{c\in C}\langle\lambda, c\rangle > 0 \iff \inf_{a\in A, b\in B}\langle\lambda, a-b\rangle > 0$$

$$\inf_{a\in A}\langle\lambda, a\rangle - \sup_{b\in B}\langle\lambda, b\rangle > 0 \iff \inf_{a\in A}\langle\lambda, a\rangle > \sup_{b\in B}\langle\lambda, b\rangle.$$

Это и означает, что множества A и B строго отделимы. □

Замечание. *Требование компактности одного из множеств в теореме о строгой отделимости существенно.*

Действительно, непересекающиеся замкнутые множества ось x и множество точек над гиперболой $\dfrac{1}{x}$, $x > 0$, не пересекаются, но не являются строго отделимыми.