4.5 Размерность множества

Пусть X — линейное нормированное пространство.

- Подпространство — аффинное множество, проходящее через 0.
- Аффинные множества A и B параллельны, если $\exists\ c \in X : B = A + c$.
- Размерность аффинного множества есть размерность подпространства, параллельного этому аффинному множеству.
- Размерность множества M есть размерность $\operatorname{aff} M$.

Размерность точки равна 0;
размерность прямой равна 1;
размерность гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ равна $n - 1$.

Определение

Точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — аффинно независимы, если никакая из них не является аффинной комбинацией остальных, а $\dim \operatorname{aff}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = n$,

т. е. $\nexists$ вектора $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \neq 0$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 : \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0$.

Легко доказать, что точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — аффинно независимы $\Leftrightarrow$ вектора $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ — линейно независимы.

Пусть точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — аффинно независимы. $\Sigma^n = \operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ называется n-мерным симплексом с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

В частности, $\Sigma^0 = a_0$ — точка в X;
$\Sigma^1 = \operatorname{conv}\{a_0, a_1\} = [a_0, a_1]$ — отрезок;
$\Sigma^2 = \operatorname{conv}\{a_0, a_1, a_2\}$ — треугольник, и т. д.

Лемма (о представлении точек симплекса через вершины)

Любая точка симплекса $\Sigma^n = \mathrm{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ единственным образом представляется в виде выпуклой комбинации его вершин: $x = \alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_n a_n$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \geq 0$, $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1$.

$\lhd$ Существование такого представления вытекает из определения выпуклой оболочки. Докажем его единственность. Предположим, имеется другое представление: $x = \beta_0 a_0 + \ldots + \beta_n a_n$, где $\beta_0, \ldots, \beta_n \geq 0$, $\beta_0 + \ldots + \beta_n = 1$. Вычитая из первого представления второе, получаем $(\alpha_0 - \beta_0)a_0 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)a_n = 0$, $(\alpha_0 - \beta_0) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) = 0$ (так как $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1$, $\beta_0 + \ldots + \beta_n = 1$) $\Rightarrow$ в силу аффинной независимости вершин симплекса $(\alpha_0 - \beta_0) = \ldots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$.
Значит, оба представления совпадают. $\rhd$

Коэффициенты $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ называются барицентрическими координатами точки $a = \alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_n a_n$ в симплексе Σ^n. Если считать, что точки a_i материальными точками массы α_i, то можно доказать, что центр масс полученной системы материальных точек будет находиться в точке a.

Если все массы одинаковы $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$ (так как $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1$), то точка $a = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{n+1} a_i$ называется центром симплекса (центром тяжести). В частности, для $\Sigma^2 = \mathrm{conv}\{a_0, a_1, a_2\}$ центр тяжести — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках a_0, a_1, a_2.

Лемма

Пусть $\dim X = n$, $\operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ — симплекс,
$a = \sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i = 1$, $t_i > 0 \Rightarrow a \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$.

$\lhd$ Аффинным преобразованием переведем пространство X в аффинное пространство $L = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k = 1\}$ так, чтобы каждая точка a_i перешла в конец базисного вектора $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$. Также можно считать, что норма – евклидова, поскольку все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны. Если $a = \sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i e_i = (t_1, \ldots, t_{n+1})$, то расстояние от a до ближайшей координатной плоскости равно $r = \min t_i$ $\Rightarrow$ n-мерный шар с центром a радиуса r целиком лежит в симплексе $\Rightarrow$ a – внутренняя точка симплекса. $\rhd$

Утверждение

$A \subset X$, $\dim \operatorname{aff} A = n \Rightarrow \operatorname{int} \operatorname{conv} A \neq \emptyset$ в $\operatorname{aff} A$.

$\lhd$ $\dim \operatorname{aff} A = n \Rightarrow \ \exists\, a_1, \ldots, a_{n+1} \in A : a_1, \ldots, a_{n+1}$ — аффинно-независимы $\Rightarrow \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ — n-мерный симплекс $\Rightarrow$ по лемме $\operatorname{int} \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \neq \emptyset$. Поскольку $\operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subset \operatorname{conv} A$, то $\operatorname{int} \operatorname{conv} A \neq \emptyset$. $\rhd$

Следствие (1)

A — выпукло, $\dim A < \infty \Rightarrow \operatorname{int} A \neq \emptyset$ в $\operatorname{aff} A$.

Следствие (2)

$A \subset \mathbb{R}^n$ — выпукло, $\operatorname{int} A = \emptyset \Rightarrow \dim A < n$.

Пример. $A \subset X$ — выпукло, $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\dim A = \dim X$.

$\lhd$ $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \sum\limits_k x_k^2 < \infty\}$ — гильбертово пр-во,

$A = \{x \in l_2 \mid |x_k| \leq \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\}$ — “гильбертов кирпич”

$\Rightarrow A$ — выпуклое, $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{aff} A = l_2$. $\rhd$

Теорема (Каратеодори)

$\dim \operatorname{conv} A = d \Rightarrow$ любой элемент из $\operatorname{conv} A$ представляется в виде выпуклой комбинации не более $d+1$ элементов из A.

$\lhd$ НеОО: $\operatorname{aff} A = X$, $\dim X = d$. Пусть $a \in \operatorname{conv} A \Rightarrow$

$a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$, $t_i > 0$, $a_i \in A$ и $n \geq d+2$. Рассмотрим векторы $a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1$. Их не менее $d+1$, и они принадлежат d-мерному линейному пр-ву $\Rightarrow$ линейно зависимы:

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (a_i - a_1) = 0,\ (\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(-\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \Big) a_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i = 0,$$

$$\lambda_1 := -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Обозначим $s := \min \left\{ -\frac{t_i}{\lambda_i} \mid \lambda_i < 0 \right\} = -\frac{t_j}{\lambda_j} > 0 \Rightarrow$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(t_i + s\lambda_i)}_{\mu_i} a_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0,\ \mu_j = 0.$$

Представили точку a как выпуклую комбинацию из не более, чем $n-1$ точки. Уменьшая далее число точек, приходим к выпуклой комбинации из не более, чем $d+1$ точки. $\rhd$

Теорема

$\dim X = d$, $A \subset X$ — компакт $\Rightarrow$ $\operatorname{conv} A$ — компакт.

$\triangleleft$ Надо доказать, что из любой последовательности $\{a_k\} \in \operatorname{conv} A$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из $\operatorname{conv} A$.

По т. Каратеодори $a_k = \sum\limits_{i=1}^{d+1} t_{ki} a_{ki}$, $a_{ki} \in A$, $\sum\limits_{i=1}^{d+1} t_{ki} = 1$, $t_{ki} \geq 0$.

A – компакт $\Rightarrow \exists$ подпоследовательность в $\{a_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке $b_1 \in A$, а в соответствующей подпоследовательности в $\{t_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\exists$ подпоследовательность, сходящаяся к некоторому числу $t_1 \in [0;1]$.

НеОО $a_{k1} \to b_1$ и $t_{k1} \to t_1$ при $k \to \infty$.

Аналогично, переходя к подпоследовательностям, считаем $a_{ki} \to b_i \in A$ и $t_{ki} \to t_i \in [0;1]$ $\forall\ i = 2, \dots, d+1$ при $k \to \infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{d+1} t_i = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \sum\limits_{i=1}^{d+1} t_i b_i \in \operatorname{conv} A$. $\triangleright$

Пример 1. $\dim X = d$, $A \subset X$ — замкнутое множество, $\operatorname{conv} A$ — незамкнутое.

$\lhd$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 0\} \cup (0, 0)$ — объединение ветви гиперболы и начала координат. $\rhd$

Пример 2. $A \subset X$ — компакт, $\operatorname{conv} A$ — не компакт.

$\lhd$ По теореме $\dim X = \infty$. Возьмем компакт A такой, что $\operatorname{conv} A$ незамкнутое множество... $\rhd$